

Corrigé - Devoir Surveillé n°1

Mathématiques

Questions de cours

1. Compléter et expliquer les phrases suivantes :
 - **Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.** Justification : Cela provient du fait que la somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat.
 - **Une médiatrice est une droite perpendiculaire à un segment passant par son milieu.** Différence avec la médiane : une médiane relie un sommet au milieu du côté opposé mais n'est pas nécessairement perpendiculaire.
 - **Le théorème de Pythagore peut être utilisé pour prouver qu'un triangle est rectangle.** Exemple : Si un triangle a des côtés de longueurs 3 cm, 4 cm, et 5 cm, alors $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, donc il est rectangle.
2. Proportionnalité :

$$\frac{15}{x} = \frac{45}{12} \implies x = \frac{15 \times 12}{45} = 4.$$

Ainsi, $x = 4$.

Exercice 1 : Nombres premiers

1. Décomposition en facteurs premiers :

- $312 = 2^3 \times 3 \times 13$,
- $728 = 2^3 \times 7 \times 13$.

2. PGCD :

$$\text{PGCD}(312, 728) = 2^3 \times 13 = 104.$$

3. Nombre de boîtes et nombre de macarons par boîte :

- (a) Le nombre maximum de boîtes est le PGCD, soit 104 boîtes.
- (b) Chaque boîte contient :

$$\frac{312}{104} = 3 \text{ macarons à la vanille, } \frac{728}{104} = 7 \text{ macarons au chocolat.}$$

4. PPCM :

$$\text{PPCM}(312, 728) = \frac{312 \times 728}{104} = 2184.$$

Le PPCM représente le plus petit nombre de macarons permettant de constituer un ensemble répétitif de boîtes.

Exercice 2 : Théorème de Thalès

1. Justification du théorème de Thalès : Les droites (MN) et (AC) sont parallèles, et les points A, M, B ainsi que A, N, C sont alignés.
2. Calcul de MN :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{AC} \implies \frac{3,2}{7,5} = \frac{MN}{8} \implies MN = \frac{3,2 \times 8}{7,5} = 3,41 \text{ cm.}$$

3. Vérification des rapports :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{7,5}{8} \approx 0,9375, \quad \frac{AM}{MN} = \frac{3,2}{3,41} \approx 0,9375.$$

Les rapports sont égaux, ce qui valide la proportionnalité.

Exercice 3 : Réciproque du théorème de Thalès

1. Calcul des rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}} = \frac{4}{10} = 0,4, \quad \frac{AN}{AC} = \frac{6}{15} = 0,4.$$

Comme les rapports sont égaux, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exercice 4 : Fonctions

1. Image de 12 par f :

$$f(12) = 3 \text{ m.}$$

2. Antécédents de 3 par f :

$$f(x) = 3 \implies x = 0 \text{ h, } 12 \text{ h, } 24 \text{ h.}$$

3. Moments où la hauteur d'eau est maximale :

$$t = 6 \text{ h, } 18 \text{ h.}$$

Hauteur maximale : 6 m.

4. Hauteur minimale :

$$f(t) = 0 \text{ m à } t = 18 \text{ h.}$$

5. Taux de variation moyen entre 6 h et 12 h :

$$\text{Taux} = \frac{f(12) - f(6)}{12 - 6} = \frac{3 - 6}{6} = -\frac{1}{2} \text{ m/h.}$$