Contrôle de Mathématiques
Première S

Date : ________________________

Instructions

- Durée : 1h30
- Vous pouvez utiliser une calculatrice.
- Justifiez vos réponses.
- Écrivez lisiblement.

Exercice 1 : Produit Scalaire (4 points)

Soient les vecteurs $\vec{u} = (3, -2)$ et $\vec{v} = (1, 4)$.

a. Calculez le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b. Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, parallèles ou ni l'un ni l'autre.

c. Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d. Déterminez l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 2 : Étude de Fonction (6 points)

Étudiez la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

a. Déterminez les limites de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et lorsque $x \to +\infty$.

b. Calculez la dérivée de $f(x)$.

c. Déterminez les éventuels extrema locaux de $f(x)$ et leur nature (maximum ou minimum).

d. Établissez le tableau de variation de $f(x)$.

Exercice 3 : Application du Produit Scalaire (5 points)

Dans un plan euclidien, on considère les points $A(1, 2)$, $B(4, 6)$ et $C(1, 6)$.

a. Déterminez les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

b. Calculez le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

c. En déduire si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.

d. Si ce n'est pas le cas, calculez l'angle entre $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Exercice 4 : Fonction Composée et Extremum (5 points)

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

a. Simplifiez l'expression de $g(x)$.

b. Calculez la dérivée de $g(x)$.

c. Déterminez les points critiques de $g(x)$ et précisez s'ils correspondent à des maxima ou des minima locaux.

d. Établissez le tableau de variation de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 : Problème Géométrique (5 points)

Dans un plan euclidien, les vecteurs $\vec{u} = (2, -1)$ et $\vec{v} = (-1, 4)$ sont donnés.

a. Calculez le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b. Déterminez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c. Vérifiez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

d. Si non, calculez l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.