

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de récupérer les bouteilles vides, à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

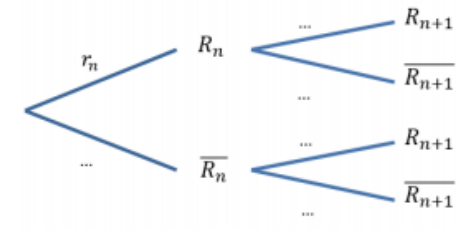
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $R_n$  l'événement le client rapporte la bouteille de son panier de la  $n$ -ième semaine.

1. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $r_n$  la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la  $n$ -ième semaine. On a alors  $r_n = P(R_n)$ .

Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2. Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $r_{n+1} = 0,75 \times r_n + 0,2$
3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = r_n - 0,8$ .  
Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
4. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'expression de  $r_n$  en fonction de  $n$ .
5. Conjecturer la limite de la suite  $(r_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.