

Exercices sur la fonction exponentielle

Série d'exercices - Fonction exponentielle

Exercice 1 - Calculs de base

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

1. $e^3 \times e^2$
2. $\frac{e^5}{e^2}$
3. $(e^2)^3$
4. $(e^{-1})^4$

Correction 1

1. $e^3 \times e^2 = e^{3+2} = e^5$
2. $\frac{e^5}{e^2} = e^{5-2} = e^3$
3. $(e^2)^3 = e^{2 \times 3} = e^6$
4. $(e^{-1})^4 = e^{-1 \times 4} = e^{-4}$

Exercice 2 - Équations simples

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $e^x = e^2$
2. $e^{2x} = e^4$
3. $e^{x+1} = e^3$
4. $e^{2x-3} = e^5$

Correction 2

1. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , elle est injective.
Donc $e^x = e^2 \Leftrightarrow x = 2$
2. $e^{2x} = e^4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$
3. $e^{x+1} = e^3 \Leftrightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$
4. $e^{2x-3} = e^5 \Leftrightarrow 2x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = 4$

Exercice 3 - Inéquations simples

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $e^x > 1$
2. $e^{2x} \leq e^3$
3. $e^{x-1} < e^2$
4. $e^{2x+1} \geq e^5$

Correction 3

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur \mathbb{R} :

1. $e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$
2. $e^{2x} \leq e^3 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$
3. $e^{x-1} < e^2 \Leftrightarrow x - 1 < 2 \Leftrightarrow x < 3$
4. $e^{2x+1} \geq e^5 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 2$

Exercice 4 - Dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{3x}$
2. $g(x) = e^{2x+1}$
3. $h(x) = xe^x$
4. $k(x) = \frac{e^x}{x^2}$ pour $x \neq 0$

Correction 4

1. $f'(x) = 3e^{3x}$
2. $g'(x) = 2e^{2x+1}$
3. $h'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$ (produit)
4. $k'(x) = \frac{e^x \times x^2 - e^x \times 2x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4}$ (quotient)

Exercice 5 - Étude de fonction

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. En déduire le tableau de variations complet de f .
5. Déterminer les extremums de f .

Correction 5

1. $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$
2. Le signe de $f'(x)$ dépend de $(1-x)$ car $e^{-x} > 0$
Donc $f'(x) > 0$ pour $x < 1$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 1$
 f est croissante sur $] -\infty, 1[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$
3. Pour $x \rightarrow -\infty : xe^{-x} = -\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$
Pour $x \rightarrow +\infty : \text{par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ donc}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
4. Tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow	0

5. Maximum : $f(1) = \frac{1}{e}$
Pas de minimum car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

Exercice 6 - Problème complet

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions que l'on précisera.
5. Déterminer le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .

Correction 6

1. $f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2 - 1)(-e^{-x})$
 $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2 + 1)$
 $f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$
 $f'(x) = -e^{-x}((x - 1)^2 - 2)$
2. Le signe de $f'(x)$ dépend de $-((x - 1)^2 - 2)$ car $e^{-x} > 0$
 $(x - 1)^2 = 2$ pour $x = 1 \pm \sqrt{2}$
Tableau des signes de f' :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$(x - 1)^2 - 2$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-

3. Pour $x \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = 0$
donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
Pour $x \rightarrow +\infty$: par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)e^{-x} = 0$
Or $e^{-x} \neq 0$ donc $x^2 - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$
5. Sur $] -\infty, -1[$: $x^2 - 1 > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f(x) > 0$
Sur $] -1, 1[$: $x^2 - 1 < 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f(x) < 0$
Sur $] 1, +\infty[$: $x^2 - 1 > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f(x) > 0$