1 Qu'est-ce que le produit scalaire ?

Définition simple

Le produit scalaire est une façon de multiplier deux vecteurs entre eux. Le résultat est un nombre (et non un vecteur).
Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on note leur produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v}$

2 Comment calculer un produit scalaire ?

Les 3 méthodes de calcul

1. **Avec les coordonnées :**
   - Si $\vec{u}(x_1, y_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2)$
   - Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$
2. **Avec la norme et l'angle :**
   - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$
   - où θ est l'angle entre les deux vecteurs
3. **Avec les projections :**
   - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times$ projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

3 Propriétés importantes

À retenir

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (norme au carré)
- Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (vecteurs perpendiculaires)

4 Exemples

4.1 Exemple 1 : Calcul avec les coordonnées

Résolution pas à pas

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}(2, 3)$ et $\vec{v}(1, -1)$

1. On identifie les coordonnées :
   - $\vec{u}$: $x_1 = 2$ et $y_1 = 3$
   - $\vec{v}$: $x_2 = 1$ et $y_2 = -1$
2. On applique la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$
3. On calcule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2 \times 1) + (3 \times (-1)) = 2 - 3 = -1$

4.2 Exemple 2 : Vérification de la perpendicularité

Résolution pas à pas

Vérifions si $\vec{a}(1, 2)$ et $\vec{b}(-4, 2)$ sont perpendiculaires.

1. On sait que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
2. Calculons $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 \times (-4)) + (2 \times 2)$
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 + 4 = 0$
4. Donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont bien perpendiculaires

5 Applications pratiques

À quoi ça sert ?

Le produit scalaire permet de :
- Calculer des angles entre deux vecteurs
- Vérifier si deux vecteurs sont perpendiculaires
- Calculer la projection d'un vecteur sur un autre
- Calculer des distances en géométrie

6 Exercices

1. Calculez le produit scalaire de $\vec{u}(3, 4)$ et $\vec{v}(1, 2)$
2. Vérifiez si les vecteurs $\vec{a}(2, -1)$ et $\vec{b}(1, 2)$ sont perpendiculaires
3. Calculez la norme de $\vec{u}(3, 4)$ en utilisant le produit scalaire

7 Conseils pour les exercices

Méthode

1. Toujours commencer par identifier les coordonnées des vecteurs
2. Choisir la méthode de calcul la plus adaptée :
   - Si on a les coordonnées $\rightarrow$ utiliser la formule avec les coordonnées
   - Si on a un angle $\rightarrow$ utiliser la formule avec le cosinus
3. Vérifier que le résultat est cohérent