Fiche de Révision : Les Suites (Niveau Bac)

Définitions, Propriétés et Exemples

1. Définition d'une suite

Une **suite** est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) qui associe à chaque entier naturel n un réel noté u_n.
Exemples :

- Suite définie par $u_n = 2n + 1$:
  $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7, \ldots$
- Suite définie par $v_n = (-1)^n \cdot n$ (alternance de signes) :
  $v_0 = 0$, $v_1 = -1$, $v_2 = 2$, $v_3 = -3, \ldots$
- Suite définie par $w_n = \frac{1}{n+1}$:
  $w_0 = 1$, $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = \frac{1}{3}$, $w_3 = \frac{1}{4}, \ldots$

2. Modes de définition d'une suite

- **Définition explicite :** u_n est donné directement en fonction de n.
  Exemple 1 : $u_n = 3n - 2$.
  Exemple 2 : $v_n = \frac{n^2}{2n+1}$.
- **Définition par réccurence :** u_{n+1} est exprimé en fonction de u_n avec une valeur initiale donnée.
  Exemple 1 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
  Exemple 2 : $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$.

Exemples de calcul :

- Avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$, on trouve :
  $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7, \ldots$
- Avec $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$, on trouve :
  $v_0 = 4$, $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = \frac{1}{2}, \ldots$

3. Sens de variation d'une suite

- **Croissante :** $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n.
- **Décroissante :** $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n.
- **Constante :** $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

Méthodes pour étudier le sens de variation :

1. **Comparer u_{n+1} et u_n.**
   Exemple 1 : $u_n = 3n + 2$, donc $u_{n+1} - u_n = 3 > 0$. La suite est croissante.
   Exemple 2 : $v_n = (-1)^n$, alors $v_{n+1} \neq v_n$: la suite n'a pas de variation simple.

2. **Étudier le signe de la dérivée (pour une expression explicite).**

Exemple :
Pour $u_n = n^2$, on calcule $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 0$ pour tout n. La suite est croissante.

4. Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est **arithmétique** si la différence entre deux termes consécutifs est constante :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où r est la raison de la suite.
Formule explicite :

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

Exemples :

- Avec $u_0 = 2$, $r = 3$, la suite est : $u_n = 2 + 3n$.
  Termes : $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_2 = 8$, $u_3 = 11, \ldots$

- Avec $u_0 = 10$, $r = -4$, la suite est : $u_n = 10 - 4n$.
  Termes : $u_0 = 10$, $u_1 = 6$, $u_2 = 2$, $u_3 = -2, \ldots$

5. Suites géométriques

Une suite (v_n) est **géométrique** si le rapport entre deux termes consécutifs est constant :

$$v_{n+1} = v_n \cdot q$$

où q est la raison de la suite.
Formule explicite :

$$v_n = v_0 \cdot q^n$$

Exemples :

- Avec $v_0 = 3$, $q = 2$, la suite est : $v_n = 3 \cdot 2^n$.
  Termes : $v_0 = 3$, $v_1 = 6$, $v_2 = 12$, $v_3 = 24, \ldots$

- Avec $v_0 = 81$, $q = \frac{1}{3}$, la suite est : $v_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
  Termes : $v_0 = 81$, $v_1 = 27$, $v_2 = 9$, $v_3 = 3, \ldots$

6. Limite d'une suite

La limite d'une suite (u_n) lorsque $n \to +\infty$ est notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Exemples :

- Si $u_n = \frac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $u_n = 3n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_n = (-1)^n$, la suite oscille entre -1 et 1 : elle n'a pas de limite.

7. Somme des termes d'une suite

- **Suite arithmétique :** La somme des n premiers termes est donnée par :

$$S_n = \frac{n+1}{2} \cdot (u_0 + u_n)$$

- **Suite géométrique :** La somme des n premiers termes est donnée par :

$$S_n = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \quad (\text{si } q \neq 1).$$

Exemples :

- Pour une suite arithmétique $u_n = 2 + 3n$, la somme des 4 premiers termes est : $S_3 = \frac{4}{2} \cdot (2 + 11) = 2 \cdot 13 = 26$.
- Pour une suite géométrique $v_n = 3 \cdot 2^n$, la somme des 3 premiers termes est : $S_3 = 3 \cdot \frac{1-2^4}{1-2} = 3 \cdot (1 - 16) = 3 \cdot (-15) = -45$.

Courage!